Lineáris algebrai alapok*

$n \times m$ **dimenziós mátrix**: az n sorból és m oszlopból álló valós számtáblázat.

Jelölés: $\mathbf{A}^{n\times m} = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$, ahol a_{ij} az i-edik sor j-edik eleme.

n dimenziós **vektor** az n sorból és 1 oszlopból álló mátrix.

Jelölés: $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, ahol b_i az i-edik koordináta.

n dimenziós **nullvektor** az az n dimenziós vektor, melynek minden koordinátája 0.

Jelölés: $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Négyzetes mátrixnak nevezzük azt a mátrixot, amelyben a sorok és az oszlopok száma megegyezik.

***n*-edrendű mátrix**nak nevezzük az $n \times n$ dimenziós négyzetes mátrixot.

Egy n-edrendű mátrix **főátlója** (*diagonálisa*) az $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elemeket tartalmazó átló.

Egy négyzetes mátrix **szimmetrikus**, ha szimmetrikus a főátlójára nézve, azaz $a_{ij} = a_{ji}$.

Diagonális mátrix az a négyzetes mátrix, amely legfeljebb a főátlójában tartalmaz 0-tól eltérő elemet.

Példa: $\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

---

* Részlet: Abonyi, Zs., Bajcsayné Fábián, I., Börzsönyi, L., Fodor, J., **Harnos, A.**, Reiczigel, J.: Biomatematikai Feladatgyűjtemény (jegyzet), SZIE ÁOTK, Budapest, 2001

Az **egységmátrix** egy olyan diagonális mátrix, amely a főátlóban 1-eseket tartalmaz.

$$I = I^{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Mátrixműveletek

Két mátrix **egyenlő**, ha dimenziójuk azonos, és elemeik rendre megegyeznek.

$$\mathbf{A}^{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{C}^{k\times l} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2l} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kl} \end{bmatrix}$$

egyenlő pontosan akkor, ha $n = k$, $m = l$ és $a_{ij} = c_{ij}$.

Két $n\times m$ dimenziós mátrix **összeg**e az a szintén $n\times m$ dimenziós mátrix, ahol minden elem a két összeadandó mátrix megfelelő elemeinek összegeként áll elő.

$$\mathbf{C} := \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix}$$

A mátrixok összeadása *kommutatív és asszociatív*:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

Egy $n\times m$ dimenziós mátrix **szorzat**a a k valós számmal *(skalárral)* az az $n\times m$ dimenziós mátrix, ahol minden elem az eredeti mátrix megfelelő elemének *k*-szorosa.

$$\mathbf{C} := k\mathbf{A} = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nm} \end{bmatrix}.$$

Egy $n \times m$ dimenziós mátrix **transzponált**ja az az $m \times n$ dimenziós mátrix, amely az eredeti mátrixból a sorok és az oszlopok felcserélésével keletkezik.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{C}^{m \times n} := \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

n dimenziós **sorvektor**nak nevezzük egy *n* dimenziós vektor transzponáltját.

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u} := \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}.$$

Két *n* dimenziós vektor, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ és $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ **skaláris szorzata** az

$$\mathbf{a}^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \text{ szám.}$$

Egy $n \times m$ **dimenziós mátrix és egy *m* dimenziós vektor szorzat**a a következő *n* dimenziós vektor:

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{m} a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} a_{nj} x_j \end{bmatrix}.$$

Egy $n \times l$ **dimenziós és egy** $l \times m$ **dimenziós mátrix szorzata** az az $n \times m$ dimenziós mátrix, mely *i*-edik sorának *j*-edik eleme az első mátrix *i*-edik sorának és a második mátrix *j*-edik oszlopának skaláris szorzata:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{lm} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{l} a_{1j} b_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{l} a_{1j} b_{jm} \\ \vdots & c_{ik} = \sum_{j=1}^{l} a_{ij} b_{jk} & \vdots \\ \sum_{j=1}^{l} a_{nj} b_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{l} a_{nj} b_{jm} \end{bmatrix}$$

A mátrixok szorzása *nem kommutatív*, azaz $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Megjegyzés: 1. Az **AB** szorzat létezéséből nem is következik, hogy a **BA** szorzat is létezik. 2. Ha létezik, akkor is általában nem azonos dimenziójúak. 3. Négyzetes mátrixok szorzása sem kommutatív:

A mátrixok szorzása *asszociatív és disztributív*, azaz $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$, valamint $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$, ha a műveletek értelmesek.

Egységmátrix:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}^{n \times n} = \mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ha **A** $n \times n$ -es mátrix, akkor **IA**=**AI**=**A**.

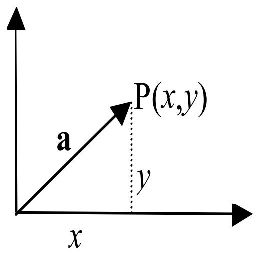
Ha **C** $n \times m$ -es: $\mathbf{I}^{n \times n}\mathbf{C} = \mathbf{C}$ illetve $\mathbf{CI}^{m \times m} = \mathbf{C}$.

Egy **A *n*-edrendű mátrix inverze** az $\mathbf{A}^{-1}$ mátrix, ha $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Mátrixok osztása nem: CSAK INVERZZEL VALÓ SZORZÁS lehetséges, ha létezik az inverz:

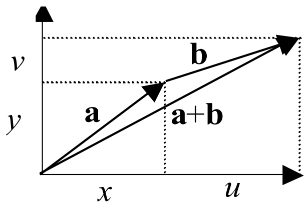
$\mathbf{AB}^{-1}$, illetve $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$. A kettő általában nem ugyanaz.
Csak négyzetes mátrixnak létezhet inverze!!

Geometriai vektorok

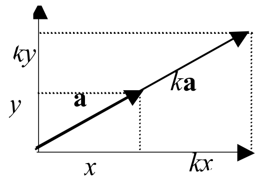


A 2, illetve 3 dimenziós vektorok megfeleltethetőek a *geometriai értelemben vett vektoroknak* a síkon, illetve a térben az alábbi módon: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ esetén *x* és *y* a koordináták, vagy másnéven a vektor komponensei.

Két vektor, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ és $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ összege: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} x+u \\ y+v \end{bmatrix}$.



Vektor számszorosa: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $k\mathbf{a} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

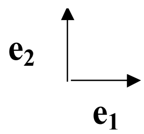


Egy vektor *normája* (vagy *abszolút értéke*, vagy *hossza*) a következő: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} = \sqrt{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$.

Bebizonyítható, hogy 2 kétdimenziós vektor skaláris szorzata $\mathbf{a}^T\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\alpha$, ahol α a két vektor által bezárt szög.

Két vektor **merőleges** egymásra, ha skaláris szorzatuk 0.

Egységvektorok: $\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



$\mathbf{e}_1^T\mathbf{e}_2 = 0$

Minden kétdimenziós vektor felírható a 2 egységvektor **lineáris kombináció**jaként: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$.

Egy **A** négyzetes mátrixot **ortogonális**nak nevezünk, ha $\mathbf{AA}^T$ diagonális mátrix. Ez azt jelenti, hogy **A** sorai páronkéntként merőlegesek egymásra, azaz skaláris szorzatuk 0.

$$\mathbf{AA}^T = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Egy **A** négyzetes mátrixot **ortonormált**nak nevezünk, ha $\mathbf{AA}^T$ egységmátrix.

Egy ortonormált mátrix transzponáltja is ortonormált, azaz oszlopai is merőlegesek egymásra.

Ortonormált mátrix esetén, mivel $\mathbf{AA}^T = \mathbf{I}$, ezért $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$.

Determinánsok

Egy $n\times n$ dimenziós **A** mátrix **determináns**a egy olyan $n!$ tagból álló összeg, melynek tagjai olyan n tényezős szorzatok, melyek a mátrix minden sorából és minden oszlopából pontosan egy elemet tartalmaznak. A tagok előjele pozitív, ha a kiválasztott elemek sor- és oszlopindexei páros számú felcserélést tartalmaznak.

Példa: egy 2x2-es mátrix determinánsa $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, ahol $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Tekintsük az **A** mátrixot a kevésbé szemléletes, szokásos írásmódban:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Ekkor $\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Mivel a mátrix 2x2-es, a tagok száma 2! azaz 2, és a tagok 2 tényezős szorzatokat tartalmaznak. Az első tag előjele pozitív, mert az oszlopindexek sorban vannak. A másodiké negatív, ugyanis az oszlopindexek között egy darab (azaz páratlan számú) felcserélődés van, mert a 2-es megelőzi az 1-est.

Egy determináns értéke nem változik, ha felcseréljük sorait és oszlopait, azaz $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$.

Ha van egy 0 sor vagy oszlop, a determináns 0.

Egy determináns értéke nem változik, ha felcseréljük sorait és oszlopait, azaz $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$.

Ha egy mátrix két sorát vagy két oszlopát felcseréljük, akkor a determinánsa (-1)-szeresére változik.

Ha egy mátrix két sora vagy oszlopa megegyezik, akkor a determinánsa 0.

Ha egy mátrix valamely sorát vagy oszlopát λ -val szorozzuk, akkor a determinánsa is λ -val szorzódik.

Ha a főátló alatt, vagy fölött minden elem 0, akkor a determináns a főátlóbeli elemek szorzata.

Ha $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$,akkor

$$\det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Ha egy mátrix bármelyik sorához (oszlopához) hozzáadjuk egy másik sor (oszlop) számszorosát, a determináns értéke nem változik.

Két mátrix szorzatának determinánsa megegyezik a két mátrix determinánsának a szorzatával, azaz $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$.

Egy n-edrendű mátrix **szinguláris**, ha determinánsa 0, **reguláris**, ha nem 0.
Szinguláris mátrixnak nincs inverze.

Lineáris összefüggőség

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ n dimenziós vektorok *lineárisan összefüggőek*, ha léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ számok úgy, hogy nem mindegyikük 0, és

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Az $\mathbf{A}$ $n \times k$ dimenziós mátrix és a $\mathbf{b}$ n dimenziós vektor *lineárisan összefüggőek*, ha az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopaiból képzett $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ n dimenziós vektorok és a $\mathbf{b}$ vektor lineárisan összefüggőek.

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ n dimenziós vektorok *lineárisan függetlenek*, ha nem lineárisan összefüggőek.

Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ n dimenziós vektorok (k<=n) lineárisan összefüggőek pontosan akkor, ha a vektorokból képzett $n \times k$ dimenziós mátrix valamennyi $k \times k$ -as aldeterminánsa 0.

Három vektor akkor lineárisan összefüggő, ha létezik λ_1, λ_2 és λ_3 nem mind 0 úgy, hogy $\lambda_1 \mathbf{a_1} + \lambda_2 \mathbf{a_2} + \lambda_3 \mathbf{a_3} = \mathbf{0}$.

Lineáris egyenletrendszerek

Cramer-szabály: tekintsük az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert, ahol $\mathbf{A}$ nem szinguláris. Ekkor az egyenletrendszer megoldható és pontosan egy $\mathbf{x}$ megoldása van, ahol $x_k = \dfrac{|\mathbf{A}_k|}{|\mathbf{A}|}$, $(k = 1,2,\ldots,n)$, ahol $\mathbf{A}_k$ úgy keletkezik, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix k-adik oszlopát kicseréljük a $\mathbf{b}$ vektorral.

Példa: az $\begin{matrix} ax_1 + bx_2 = u \\ cx_1 + dx_2 = v \end{matrix}$ vagy mátrix alakban írva $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, ahol

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ egyenletrendszer megoldása $x_1 = \dfrac{ud - vb}{ad - bc} = \dfrac{\begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$ és

$$x_2 = \frac{av - cu}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

Egyenletrendszerek megoldhatósága

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{u}$ lineáris egyenletrendszer megoldhatóságára az alábbiak igazak:

ha $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, akkor a Cramer szabály alkalmazható és

- $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (homogén) esetén csak az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ triviális megoldás létezik,
- $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ esetén létezik pontosan egy $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ nem triviális megoldás;

ha $\det(\mathbf{A}) = 0$, akkor a Cramer szabály nem alkalmazható és

- $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (homogén) esetén az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ triviális megoldás és végtelen sok $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ nem triviális megoldás létezik
- $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ esetén nincs megoldás
  egyébként végtelen sok megoldás van.

Sajátvektor, sajátérték

Egy $\mathbf{A}$ $n \times n$-es mátrixszal való szorzás, $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$, $\mathbf{R}^n$-nek egy transzformációját hozza létre. Erre teljesül:

$(\alpha\,\mathbf{x})' = \alpha\,\mathbf{x}', (\mathbf{A}(\alpha\,\mathbf{x}) = \alpha\,\mathbf{Ax})$, és $(\mathbf{x} + \mathbf{y})' = \mathbf{x}' + \mathbf{y}'$,

ezért ezt lineáris transzformációnak nevezzük. **A** a lineáris transzformáció mátrixa.

Lineáris transzformáció **sajátvektor**a olyan (nem **0**) vektor, amelynek képe a vektor számszorosa. A szorzószám a sajátvektorhoz tartozó **sajátérték**.

Négyzetes mátrix sajátvektora és sajátértéke:

A-nak az $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ vektor sajátvektora λ sajátértékkel, ha $\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{u}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$).

- **u**-nak a transzformáció csak a hosszát változtatja, az irányát nem;

(- minden sajátvektorhoz csak egy sajátérték tartozik);

Egy $n \times n$-es mátrixnak legfeljebb n különböző sajátéréke van.

.